# Problèmes ouverts, narrations de recherche, tâches complexes et créativité mathématique.

## Les suites c'est limite, oui enfin limites de suites …

1) $u$ est la suite définie sur ℕ par $u_n = \sqrt{5n+2}$
Que fait l'algorithme suivant ?
Coder l'algorithme sur votre calculatrice ou Algobox.
L'exécuter avec A=20 puis A=50 et d'autres valeurs de A.
Quelle conjecture permet-il d'émettre ? La démontrer.

```
Entrée
Saisir la valeur de A
Initialisations
u prend la valeur √2
n prend la valeur 0
Traitement
Tant que u <= A
  | n prend la valeur n + 1
  | u prend la valeur √(5n + 2)
FinTantque
Sortie
Afficher n
```

2) $u$ est la suite définie sur ℕ* par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$ . Démontrer que la suite converge vers 2 en utilisant la définition, c'est-à-dire que quelque soient α et β, deux réels strictement positifs, il existe un entier $n_0$, que l'on déterminera, tel qu'à partir de $n_0$, tous les $u_n$ sont dans l'intervalle ]2-α ;2+β[.

3) FI→transformations→limites…

$u_n = n - \sqrt{n}$

$v_n = \dfrac{3-n^2}{n^2-1}$

$w_n = \dfrac{1}{n}(4-n-n^2)$

4) Avec l'expression conjuguée

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n - \sqrt{(n+1)(n+2)}$.
Conjecturer la limite de $u$ avec la calculatrice puis faire le calcul.

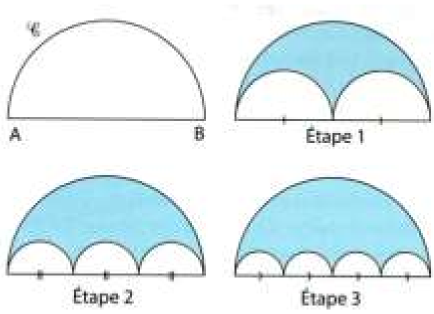
5) $u$ est la suite définie pour tout nombre entier n≥1 par :

$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Bob dit « Sachant que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, je pense que la limite de $u$ ne peut pas être infinie et d'ailleurs ne doit pas dépasser 10 environ »
Alice lui répond : « Utilise plutôt cet algorithme et tu pourras émettre»
Bob (après avoir compris l'algorithme, programmé, testé puis conjecturé) lui rétorque : « Ah oui, je n'avais vu le problème comme cela . Et comme j'ai montré que pour tout entier $k$ compris entre 1 et $n$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1$, la démonstration devient évidente.

```
Entrée
Saisir la valeur de A
Initialisations
u prend la valeur 1
k prend la valeur 1
Traitement
Tant que u <=A
  | k prend la valeur k + 1
  | u prend la valeur u + 1/√k
FinTantque
Sortie
Afficher k
```

6) $\mathcal{C}$ est un demi-cercle de diamètre [AB] avec AB=10 cm
On note $a_n$ l'aire du domaine coloré (gris) à la n$^{\text{ième}}$ étape.
Etudier la limite de la suite $(a_n)$.




7) <u>Découpage d'un segment</u>

A et B sont deux points du plan tels que AB=10
Pour tout nombre naturel $n$ non nul , on définit sur le segment [AB] les points $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}$ ainsi :

$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{9}\overrightarrow{M_1B}$

…………………

$\overrightarrow{M_nM_{n+1}} = \frac{1}{(n+1)^2}\overrightarrow{M_nB}$

Placer les premiers points sur le segment [AB]
$u$ est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = M_nB$.
Calculer $u_1$ et en utilisant la relation de Chasles avec le point B, montrer que pour tout n$\in \mathbb{N}^*$ ,

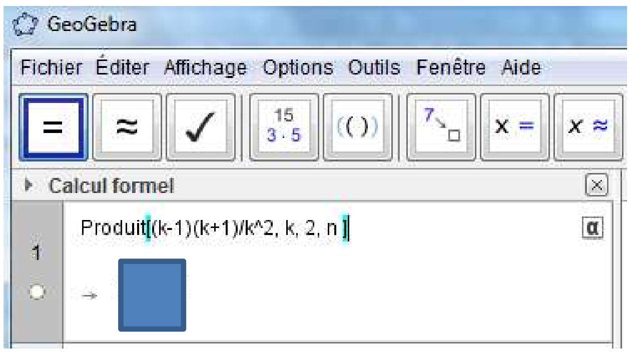
$$u_{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \times u_n$$

En déduire que pour tout n$\in \mathbb{N}^*$ ,

$$u_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \times \frac{(n-2)(n)}{(n-1)^2} \times \dots \times \frac{1\times 2}{2^2} \times u_1$$

Il semble intéressant de simplifier le produit de fractions $\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \times \frac{(n-2)(n)}{(n-1)^2} \times \dots \times \frac{1\times 2}{2^2}$. Pour cela nous allons utiliser le module de calcul formel de GeoGebra (CAS).
Téléchargez le logiciel si ce n'est déjà fait http://www.geogebra.org/cms/fr/download/ ou utilisez la version en ligne http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html .

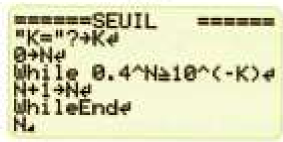
Entrez la commande **Produit[(k-1)(k+1)/k^2, k, 2, n ]** dans la console de calcul formel, remarquez que cela correspond bien à ce que l'on cherche : le produit de facteurs $\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ pour k entier allant de 2 à n.
La commande générale est :
**Produit[ <Expression>, <variable>, <de>, <à> ]**.
Notez le résultat obtenu et déduisez-en l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.




Déterminez la limite de la suite $u$.
Combien de point $M_n$ faut-il placer sur [AB] pour que $u_n \leq 3{,}75005$ ?

8) On a programmé le même algorithme sur deux calculatrices.
Que fait-il ? Qu'affiche-t-il quand on entre k=3 comme valeur de k ?
Justifier que cet algorithme s'arrête bien pour toute valeur de k, entier strictement positif.

Casio




TI


9) Avec de bons gendarmes…

Pour tout n∈ ℕ*, on pose : $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$. Quel est le plus petit terme de cette somme ? Le plus grand ? En déduire un encadrement de $u_n$ pour n≥1 puis la convergence de la suite.

Les gendarmes sont toujours là… un peu cachés : $v_n = \frac{\sin(1)}{n^2} + \frac{\sin(2)}{n^2} + \cdots + \frac{\sin(n)}{n^2}$

10) Converge ou converge pas ?

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

11) Converge ou converge pas ? Une question récurrente !

$\sqrt{2}$

$\sqrt{2\sqrt{2}}$

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$

…..

12) Des relevés montrent que la population de (*animaux de votre choix*) diminue de 20% par an. En 2010, le nombre d'(*animaux de votre choix*) était estimé à 200 (*animaux de votre choix*) par hectare.
Le protecteur des (*animaux de votre choix*) décide d'introduire 200 (*animaux de votre choix*) chaque année, et on suppose que cela se fait sans perte.
Comment évolue la population des (*animaux de votre choix*) ? Cet apport annuel permet-il d'envisager la disparition de l'espèce, sa stabilisation ou son accroissement ?