Avant-propos

Les mathématiques en classe de Première S sont une introduction fondamentale à la classe de Terminale S et sont dans l'antichambre des études supérieures : les élèves ont 4 heures de classe « normale » avec 1 heure de TD éventuellement dédoublée ; on peut disposer également d'heures d'Accompagnement et d'heures de TPE, sans parler des heures de rattrapage éventuel pendant les vacances scolaires. Par ailleurs la latitude laissée aux Établissements de mettre en place une partie des heures à leur guise laisse augurer des organisations encore inconnues à l'heure actuelle.

Le manuel classique tel qu'il est encore proposé par les éditeurs me semble présenter un certain nombre d'inconvénients, en tout cas ne répond plus tout à fait aux besoins actuels des enseignants et des élèves. Comme pour la classe de Seconde, je vous propose un cahier-livre d'une taille raisonnable, couvrant l'essentiel du programme et destiné à être utilisé puis **conservé** par les élèves… Ce cahier peut également faire office de **cahier de vacances** ou de révisions afin de préparer au mieux l'entrée en Terminale S. La progression suivie à travers les chapitres du livre est assez classique mais de toutes manières il y a des balises incontournables. Ceci dit il peut être assez rentable de traiter/étudier rapidement les principales notions (cours et applications directes) et de revenir ultérieurement sur les problèmes plus complexes.

Chaque chapitre comporte essentiellement cinq parties : cours, applications directes, situations intermédiaires, problèmes avec prise d'initiative, test. Quelques symboles permettent de voir rapidement dans quel cas de figure on se trouve (ce ne sont que des suggestions), permettant à chacun d'avancer à son rythme… et de mieux cibler ses efforts. Le principal objectif visé dans les choix d'exercices, mis à part de coller aux exigences du programme, est le débouché vers des études supérieures a priori scientifiques ou économiques : pour ce faire je propose diverses activités de découverte où l'algorithmique et la programmation jouent un rôle central. Ces thèmes peuvent être exploités en TPE mais peuvent être une introduction à la spécialité Mathématiques ainsi qu'à la spécialité Informatique et Sciences du Numérique.

Sigles accompagnant chaque situation ou exercice :
Cours à connaître ABSOLUMENT…

Problème pouvant donner lieu à un TPE ou être utilisé dans un TPE. Les mathématiques sont souvent maltraitées dans ce type d'activité, les situations proposées peuvent généralement être étudiées expérimentalement, voire donner lieu à des activités de programmation.

Ordinateur ou calculatrice utile ou même indispensable : le principal logiciel à utiliser est GeoGebra qui donne énormément de possibilités (http://www.geogebra.org/cms/fr). Un tableur autonome peut également faire l'affaire.

Questions algorithmiques dans l'exercice. On peut écrire l'algorithme même si on n'a pas de machine et le tester soit avec un ordinateur soit une calculatrice.

Méthode nouvelle ou à connaître (les deux pouvant être simultanées…) : en général la résolution de l'exercice correspondant doit être connue …

Les **QCM** et autres **Vrai-Faux** que l'on trouve dans chaque chapitre proviennent essentiellement de sujets de concours d'entrée dans des écoles d'ingénieurs qui recrutent directement après le bac (FESIC-Puissance 11, ESIEE-Avenir, EPF, GEIPI, …). Évidemment on ne trouvera que des exercices accessibles en 1ère S ! Par contre il sera souvent intéressant de se confronter en temps limité à ce genre d'activités… D'une manière générale n'hésitez pas à vous servir des espaces laissés libres, surtout en début de chapitre, ils sont là **pour vous**….

De l'utilisation intelligente des **calculatrices** : depuis très longtemps l'activité scolaire était tournée vers le calcul « manuel » où les démonstrations se faisaient intégralement et où les divers calculs algébriques se faisaient de manière exacte. La manipulation d'algorithmes élaborés, la compréhension des situations et l'utilisation des calculatrices ou des ordinateurs a modifié profondément les démarches mathématiques usuellement enseignées dans le second degré ainsi que celles acceptables au Lycée : par exemple plutôt que d'essayer de résoudre directement une équation de manière formelle, il vaut mieux AU PRÉALABLE savoir ce que l'on cherche et trouver des solutions avec la calculatrice, quitte à revenir à la démarche « manuelle » ultérieurement. Par ailleurs de nombreuses situations seraient normalement inabordables sans un lourd bagage de connaissances : les machines permettent maintenant de varier considérablement les situations et d'aborder des problèmes de niveau élevé sans même s'en rendre compte… La conclusion est donc que l'apprentissage de votre machine à calculer et d'un ou deux logiciels sont IMPÉRATIFS et doivent faire dorénavant partie de votre culture de base.

Cours : les notions à connaître sont listées et vous devez être capable de répondre directement sur le livre. On peut ainsi vérifier l'acquisition (au moins formelle) des éléments de base du cours… et les garder sous la main en permanence. Des fiches vierges sont disponibles sur le site.

De nombreux exercices sont **corrigés** sur le site http://laroche.lycee.free.fr afin d'aider les élèves souhaitant se perfectionner ou travailler durant les vacances ; on trouvera également des exemples de progression pour vous guider. Ceci dit, toutes remarques ou suggestions seront évidemment les bienvenues.

Table des matières

1. Géométrie 7
   - 1.1 Je connais mon cours 7
   - 1.2 Exercices de base 9
   - 1.3 Trigonométrie 14
   - 1.4 Pour chercher 19
   - 1.5 QCM et Vrai-Faux 23
   - 1.6 Algorithmes & Programmes 26

2. Algèbre 33
   - 2.1 Je connais mon cours 33
   - 2.2 Exercices de base 34
   - 2.3 Mises en équation 36
   - 2.4 Polynômes 40
   - 2.5 Avec de la géométrie 41
   - 2.6 QCM et Vrai-Faux 43
   - 2.7 Pour chercher 47

3. Fonctions partie 1 55
   - 3.1 Je connais mon cours 55
   - 3.2 Exercices de base 57
   - 3.3 Exercices intermédiaires 70
   - 3.4 Pour chercher 74
   - 3.5 Vrai - Faux 79
   - 3.6 Algorithmes & Programmes 82

4. Suites 89
   - 4.1 Je connais mon cours 89
   - 4.2 Exercices de base 92
   - 4.3 Exercices intermédiaires 98
   - 4.4 Pour chercher 110
   - 4.5 Vrai - Faux 115
   - 4.6 Algorithmes & Programmes 119

5. Statistiques et probabilités 131
   - 5.1 Je connais mon cours 131
   - 5.2 Exercices de base en statistiques 132
   - 5.3 Exercices de base en probabilités 139
   - 5.4 Exercices intermédiaires 143
   - 5.5 Pour chercher 147
   - 5.6 QCM et Vrai-Faux 150
   - 5.7 Algorithmes & Programmes 160

6. Fonctions partie 2 165
   - 6.1 Exercices de base 165
   - 6.2 Exercices intermédiaires 172
   - 6.3 Optimisation et modélisation 188
   - 6.4 Pour chercher 190
   - 6.5 Vrai-Faux 205

7. Loi binomiale 209
   - 7.1 Coefficients binomiaux et chemins 209
   - 7.2 Je connais mon cours 211
   - 7.3 Exercices de base 212
   - 7.4 Exercices intermédiaires 213
   - 7.5 Pour chercher 218
   - 7.6 QCM et Vrai-Faux 224

8. Algorithmes et informatique 229
   - 8.1 Un peu de logique 229
   - 8.2 Quelques bases 235
   - 8.3 Calculs et logique 238
   - 8.4 Algorithmes & Programmes 243
   - 8.5 Bac L spécialité mathématiques 248
   - 8.6 Pour chercher 254
   - 8.7 Quelques références 262

Leonhard Euler, 1707-1783, le roi de l'Analyse

3. Fonctions partie 1

3.1 Je connais mon cours

Algorithme permettant de trouver la limite d'une fonction f lorsque la variable x tend vers une valeur a :
Le nombre dérivé d'une fonction f en un point d'abscisse a est : $f'(a) =$ Une fonction f est dérivable en $x=a$ lorsque :
Géométriquement le nombre dérivé $f'(a)$ est :
L'équation de la tangente à la courbe d'une fonction f en un point d'abscisse a est :

fonction	dérivée	fonction	dérivée
$kx^n,\ n \in \mathbb{Q}$		$\frac{k}{x^n}$	
$u+v$		ku	
uv		$u^n,\ n \in \mathbb{Q}$	
$\frac{1}{u}$		$\frac{u}{v}$	
$\sqrt{u}$			

Une fonction f est croissante entre a et b lorsque :

Une fonction f est décroissante entre a et b lorsque :

Pour déterminer le sens de variation d'une fonction, je…

Pour étudier les positions respectives de deux courbes correspondant à deux fonctions f et g, je…

La fonction $x \to |x|$ a pour représentation graphique :

Je résoud l'inéquation $|x-a| \leq b$:

Je traduis les inégalités $-5 \leq x \leq 9$ à l'aide de la valeur absolue par :

Je cherche à savoir si l'écart entre deux nombres a et b est inférieur à une valeur p donnée :

L'algorithme correspondant est :

La fonction $x \to \sqrt{x}$ a pour représentation graphique :

En utilisant la dérivée de u^n avec $n = \frac{1}{2}$, j'obtiens que la dérivée de $\sqrt{u}$ est :

Le sens de variation de $\sqrt{u}$ lorsque $u \neq 0$ est le même que celui de u car :

3.2 ⚠ Exercices de base

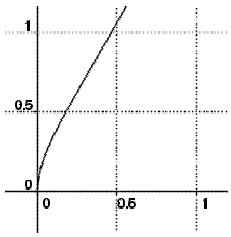
3.2.1 Calculs de limites

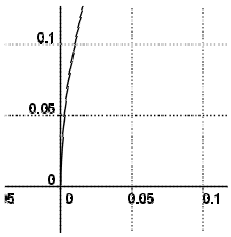
On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x}}$ dont on cherche le comportement en 0.

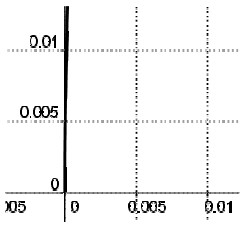
1. Quel est son ensemble de définition ?

2. a. Compléter le tableau suivant et conjecturer la limite de f en 0.

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$f(x)$						







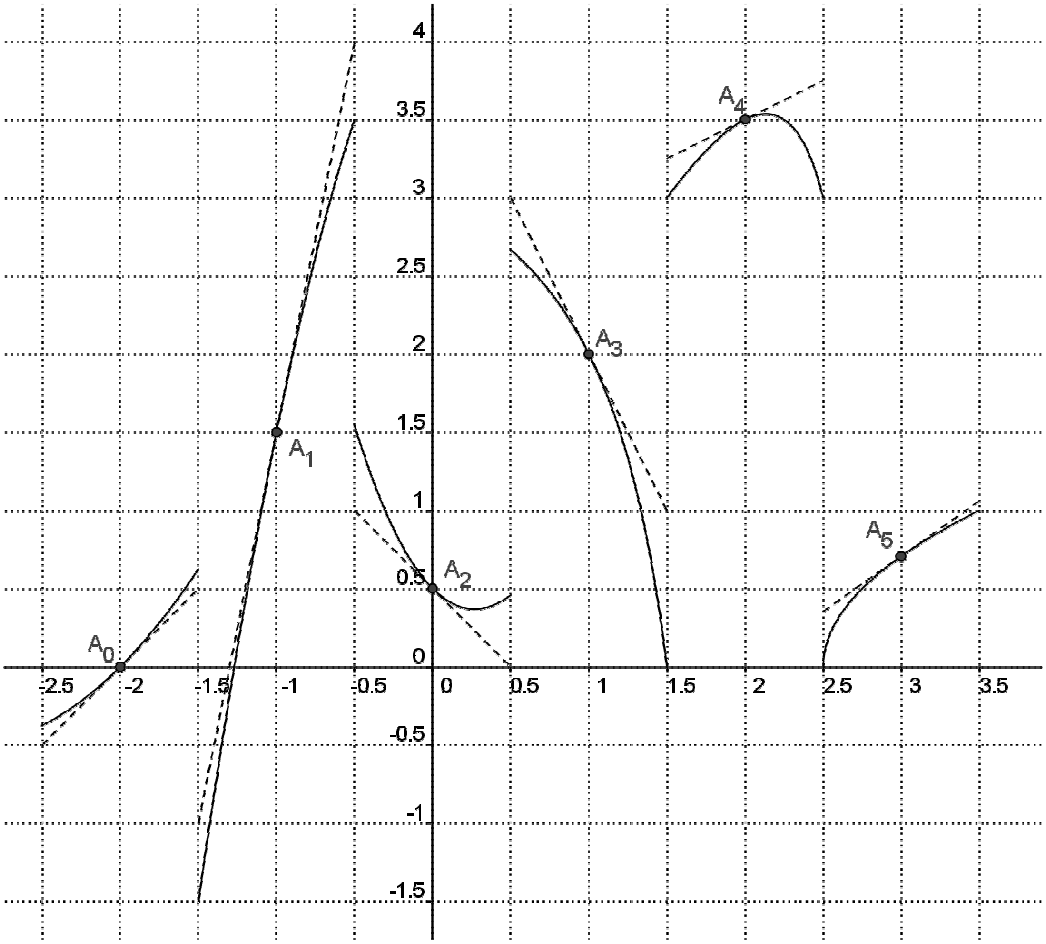
b. À l'aide de la représentation graphique de f, confirmer ou infirmer votre résultat. Par exemple avec la fonction précédente on a les écrans ci-dessus.

3. Écrire un algorithme permettant de simuler le calcul fait ici : on demandera à l'utilisateur la valeur a vers laquelle tend x ainsi que la précision e en $\pm 10^n$ souhaitée (ici $e=+10^{-5}$). La fonction est saisie à part.

4. Appliquer votre algorithme aux cas suivants :

fonction	valeur de a	limite	confirmation graphique
$f(x)=\dfrac{2x+2}{1-x^2}$	$a=1, a>1$		
	$a=1, a>1$		
	$a=-1, a<-1$		
	$a=1, a>1$		
$f(x)=\dfrac{\sqrt{1-2x^2}}{\sqrt{2}-2x}$	$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		
$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$	$a=0, a>0$		
	$a=0, a<0$		

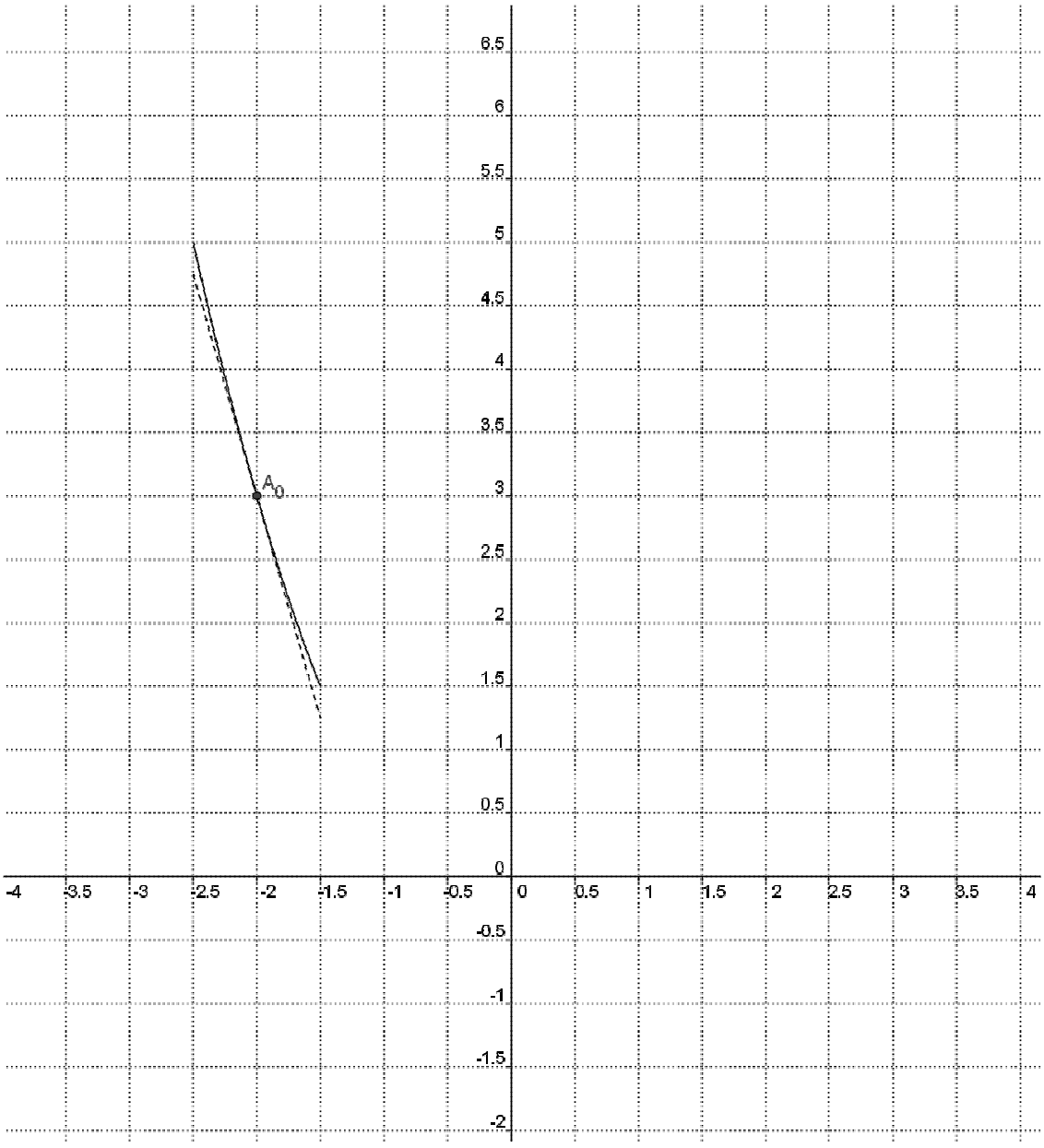
3.2.2 Lecture graphique



Sur le graphique lire pour chaque morceau de courbe les coordonnées du point A_n, le nombre dérivé de f_n et l'équation de la tangente à la courbe de f_n au point A_n. Exemple traité pour $n=0$.

n	$A_n\left(a_n\,;f_n\left(a_n\right)\right)$	$f_n'\left(a_n\right)$	Tangente en A_n
0	(–2 ; 0)	1	$y=x+2$
1			
2			
3			
4			
5			

3.2.3 Calcul du nombre dérivé



1. Pour chacune des fonctions suivantes donner le nombre dérivé en a_n à l'aide de la calculatrice puis à l'aide d'un calcul algébrique.

2. Pour chaque cas préciser l'équation de la tangente à la courbe de la fonction en a_n.

3. Tracer la portion de courbe de f_n sur un intervalle $[a_n - 0,5\,;a_n + 0,5]$ ainsi que la portion de tangente correspondante (l'exemple traité est f_0).

Fonction	Nombre dérivé (calculatrice)	Nombre dérivé (direct)	Tangente
$f_0(x)=x^2+\frac{1}{2}x$ $a_0=-2$	–3,5	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{f_0(x)-f_0(-2)}{x-(-2)}=-\frac{7}{2}$	$y=\frac{-7}{2}(x+2)+3$
$f_1(x)=-2x^2+x+1$ $a_1=0$			
$f_2(x)=x^3+2x$ $a_2=1$			
$f_3(x)=\frac{2}{x-1}$ $a_3=2$			
$f_4(x)=x+\frac{1}{x}$ $a_4=-1$			

3.2.4 QCM justifié

Choisir la bonne réponse parmi les trois proposées et justifier votre réponse.

Pour toutes les questions, on considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$ par $f(x)=2-\frac{1}{x+1}$.

On appelle C sa courbe représentative dans un repère donné du plan.

1. On a :

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-1$	$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=2$	$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=-\infty$

2. La fonction dérivée de *f* est :

$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$	$f'(x)=2+\frac{1}{(x+1)^2}$	$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$

2. Étudier les variations de *f*. Dresser le tableau de variations de *f*.

3. Déterminer l'équation de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point *I* d'abscisse 0. Étudier la position de (C) par rapport à (T).

4. Démontrer que *I* est centre de symétrie de (C).

5. Construire la courbe (C) et la tangente (T) dans le repère proposé.

3.3 Exercices intermédiaires

3.3.1 ⚠ Solution d'équation

1. Montrer à l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel adapté que l'équation $\frac{2x-1}{x^3}=1$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};1\right[$.

2. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

3.3.2 Tangente

Déterminer la tangente à la courbe (C) d'équation $y=f(x)=-x^4+2x^2+x$ au point $A(-1\,;\,0)$.

Montrer que cette droite est aussi tangente à (C) en un autre point que l'on précisera.

3.3.3 Second degré

Soit f la fonction trinôme telle que $f(x)=ax^2+bx+c$.

1. Déterminer les réels *a*, *b*, *c* tels que sa courbe C_f admette au point $A(1;3)$ une tangente de coefficient directeur égal à 1 ainsi qu'une tangente horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

2. Étudier les variations de *f* et tracer sa courbe représentative.

3.3.4 ⚠ 3ème degré

On considère une fonction *f* définie et dérivable sur [0 ; 14]. Sa représentation graphique est la courbe ci-dessous. La tangente au point A est la droite (D) = (AB) .

1. a. Lire les valeurs de $f(4)$, $f(7)$ et $f(13)$.

b. Quels sont les réels *x* tels que $f(x)=0$?

c. Donner l'ensemble des réels *x* tels que $0\le f(x)\le 4$.

2. a. Que valent $f'(4)$ et $f'(10)$? (Justifier)

b. Donner une équation de la droite (D). Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?

c. Dresser le tableau de variations de *f* sur *I*.

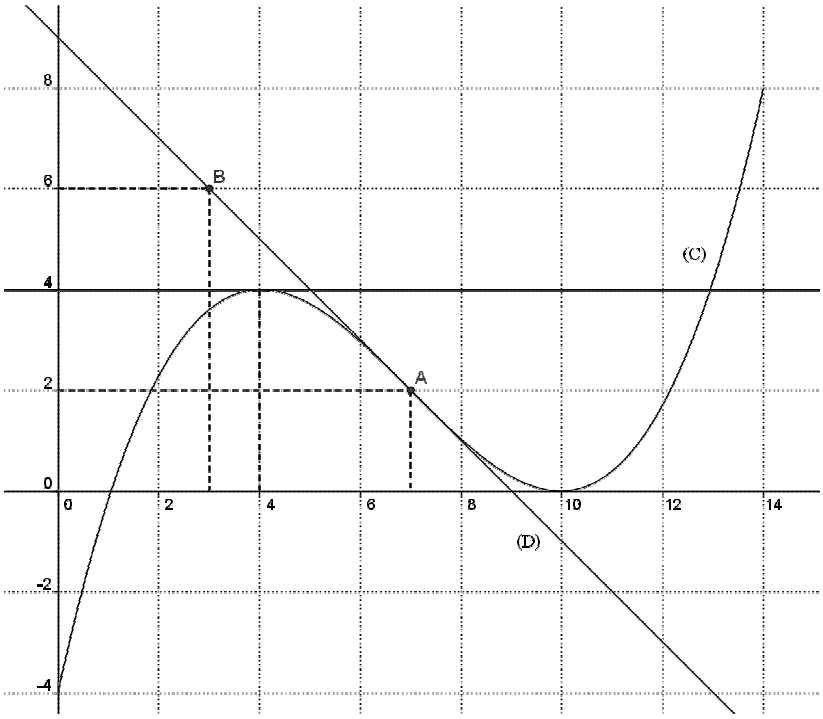
3. On sait que *f* est de la forme $f(x)=\frac{1}{27}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)$.

a. Déterminer $f'(x)$ en fonction de *a* et *b*.

b. Utiliser la question 2.a. pour déterminer les valeurs de *a* et *b*.

Utiliser alors une des réponses du 1.a. ou 1.b. pour en déduire *c*. Donner alors l'expression de $f(x)$.

c. Déterminer graphiquement et par le calcul $f(0)$.



3.3.5 Polynôme de degré 4

Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto 2x^4 - 3x^3$ sur $\mathbb{R}$ (calcul de la dérivée, étude du signe de la dérivée, variations de *f*).

On donnera l'équation de la tangente à C_f au point d'abscisse -1. Tracer cette tangente et C_f.

3.3.6 ⚠ Valeurs approchées

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Calculer la dérivée f' de *f*. Dresser le tableau de variation de *f*.

2. Trouver une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de *f* au point d'abcisse 1.

3. Que peut-on dire de la tangente (T') à (C) au point d'abcisse –1 ?

4. Déterminer à l'aide de (T) une valeur approchée de *f*(1,02) puis de *f*(0,96).

3.3.7 ⚠ Méthode de Ruffini-Hörner

1. Pour calculer brutalement les valeurs d'un polynôme de degré 3, $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, il faut faire 6 multiplications ($a \times x \times x \times x$, $b \times x \times x$ et $c \times x$) et 3 additions.

Dans un ordinateur les ordres de grandeur du temps passé à faire une multiplication et une addition sont semblables : on a donc 9 opérations à effectuer.

Donner un moyen simple d'éliminer une multiplication.

2. Combien d'opérations devra-t-on faire pour un polynôme de degré *n* ? Pour cela compléter la colonne (brut) du tableau suivant et essayer de trouver une formule générale pour ce nombre d'opérations.

n	nombre d'opérations (brut)	nombre d'opérations (Horner)	n	nombre d'opérations (brut)	nombre d'opérations (Horner)
1			5		
2			6		
3			7		
4			8		

3. En écrivant le polynôme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sous la forme

$$f(x) = d + x\left(c + bx + ax^2\right) = d + x\left(c + x\left(b + ax\right)\right),$$

on ne fait plus que 3 multiplications et 3 additions, soit 6 opérations.

Écrire des polynômes de degrés 2, 4, 5, 6, 7 et 8 de la même manière et complétez le tableau.

4. Essayez de trouver une fonction de n donnant le nombre d'opérations à effectuer pour chacun des cas.

5. Organisez une course de vitesse entre deux calculatrices : l'une calculant suivant le schéma standard, l'autre selon le schéma de Hörner.

Comparez les temps de calculs et retrouvez peut-être les résultats précédents…

3.3.8 ⚠ Approximations

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1+2x}{1-x}$ ainsi que les fonctions g et h définies par $g(x) = 1+3x$ et $h(x) = 1+3x+3x^2$. On appelle C_f, C_g et C_h leurs courbes représentatives.

1. Trouver a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{1-x}$ pour tout x réel différent de 1. Étudier les variations de f.

Les parties des courbes correspondant à l'intervalle $[-1\,;1[$ sont tracées ci-dessous.

2. a. Étudier les variations de h.

b. Vérifier que C_g est la tangente à C_f et C_h en 0.

3. Préciser par le calcul la position de C_f par rapport C_g.

4. On se demande s'il ne serait pas possible de trouver une fonction du troisième degré dont la courbe « ressemblerait » à C au voisinage de 0.

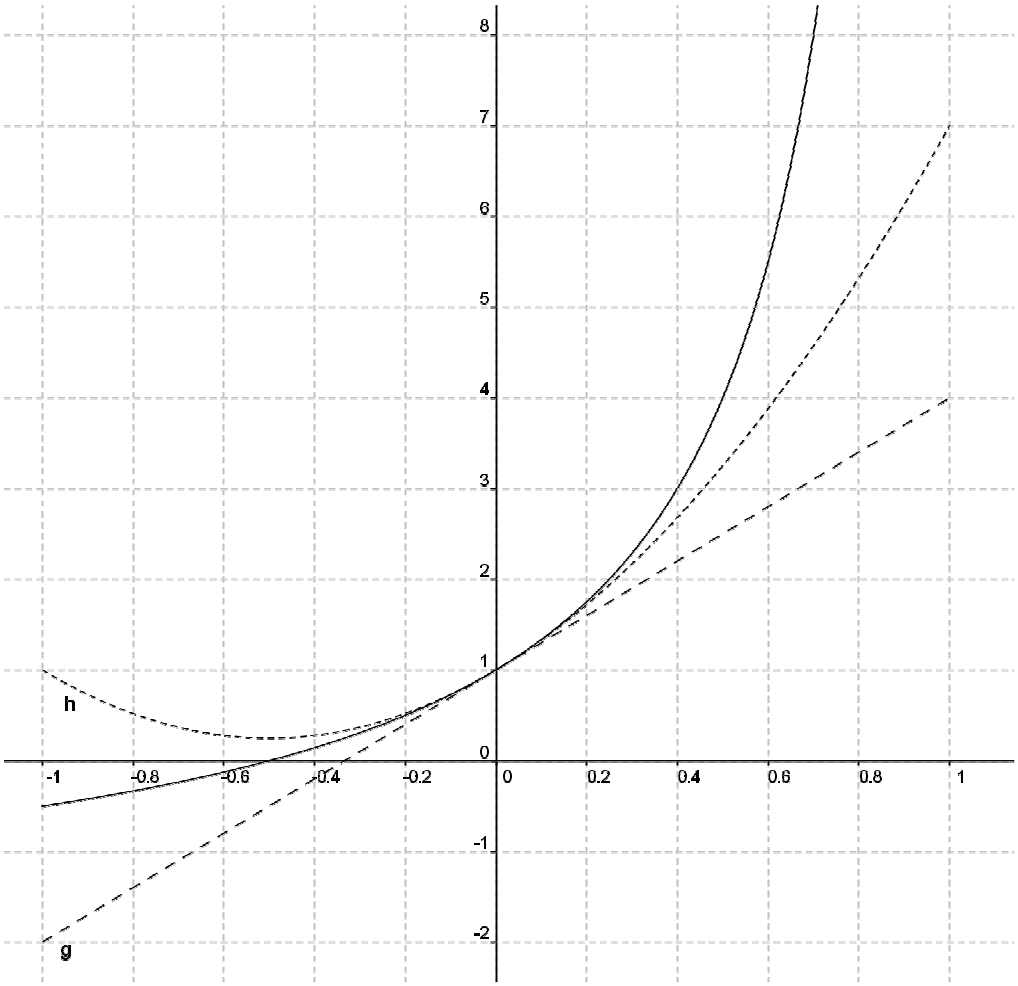
a. Vérifier que $1 + x + x^2 + x^3 + \dfrac{x^4}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$.

b. En déduire avec l'aide du 1. que $f(x) = 1+3x+3x^2+3x^3 + \dfrac{3x^4}{1-x}$.

Tracer la courbe représentative de $k(x) = 1+3x+3x^2+3x^3$ sur la figure.

c. Donner un encadrement de $\dfrac{3x^4}{1-x}$ à l'aide de votre calculatrice pour $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$.

Que peut-on dire de $f(x) - k(x)$ lorsque $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$? Conclure.



3.3.9 ⚠ Des courbes

1. On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

a. Vérifier que $P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 2)$.

b. Étudier le signe de $P(x)$.

2. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x - 2}$ et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (en abscisse : 1 cm pour 1 unité, en ordonnée : 1 cm pour 2 unités).

a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2P(x)}{(x-2)^2}$.

b. Étudier les variations de *f* et dresser son tableau de variation.

3. a. Pour quelle abscisse *a* la tangente au point d'abscisse *a* est-elle horizontale ? Justifier.

b. Déterminer l'équation de la tangente T à C en $x = 0$ et la tracer dans le même repère que C.

c. Tracer C dans le repère précisé ci-dessus.

4. a. Trouver a, b, c et d tels que, pour tout réel x différent de 2, $f(x) = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-2}$.

b. On appelle g la fonction définie par $g(x) = x^2 + 2x + 1$ et P sa courbe représentative.

Étudier les positions relatives de C et P.

c. Tracer P dans le même repère que C et T. Que pourriez vous dire d'intelligent sur les relations entre P et C lorsque x devient grand ?

3.4 Pour chercher

3.4.1 Coûts de production

Une entreprise fabrique et vend chaque jour un nombre x d'objets. Chaque objet est vendu 100 €.

Le coût de production unitaire $U(x)$ exprime le coût de production par objet produit.

On a déterminé qu'il est égal à $U(x) = x - 10 + \frac{900}{x}$ pour x appartenant à l'intervalle I= [10 ; 100] .

1. a. Étudier la fonction U sur I. Tracer sa courbe C (unités : 1 cm pour 5 objets, 1 cm pour 10 €).

b. Déterminer pour quelle production le cout unitaire est le plus bas. Calculer alors le bénéfice de l'entreprise.

c. Déterminer graphiquement le nombre d'objets que l'on doit fabriquer et vendre pour avoir un coût de production unitaire inférieur ou égal à 80 €.

2. Montrer que le bénéfice global de l'entreprise est $B(x) = -x^2 + 110x - 900$.

Déterminer son sens de variation sur I et déterminer la production pour avoir un bénéfice maximal.

Quel est ce bénéfice ?

3.4.2 Semi-remorque

Le coût de revient journalier d'un véhicule tracteur avec semi-remorque de 40 tonnes se compose :

- d'un terme fixe : le coût par jour, en euros ;
- d'un terme variable : le coût au kilomètre, en euros.

On donne les informations suivantes :

	Coût au km (en €)	Coût par jour (en €)
Septembre 2010	2,43	2246
Septembre 2011	2,50	2380

1. On se place dans le cas particulier où 600 km sont parcourus par jour en septembre 2010 comme en septembre 2011.

a. Calculer le coût de revient journalier en septembre 2010 puis en septembre 2011.

b. Calculer le coût de revient journalier par km en septembre 2010 puis en septembre 2011.

c. Calculer le pourcentage d'augmentation du coût de revient journalier par km entre septembre 2010 et septembre 2011 (arrondir au centième).

2. On considère le mois de septembre 2011 et on se place dans le cas général où le nombre de kilomètres parcourus par jour est noté n.

a. Donner l'expression du coût de revient journalier C_1 en fonction de n.

b. Donner l'expression du coût de revient journalier par kilomètre C_2 en fonction de n.

c. Une entreprise de transport souhaite limiter le coût de revient journalier par km à 7,50 €. Calculer la distance journalière minimale pour atteindre cet objectif.

3. Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle [300 ; 600] par : $f(x) = 2{,}5 + \dfrac{2\,380}{x}$.

a. Déterminer le sens de variation de la fonction *f*. Dresser son tableau de variation.

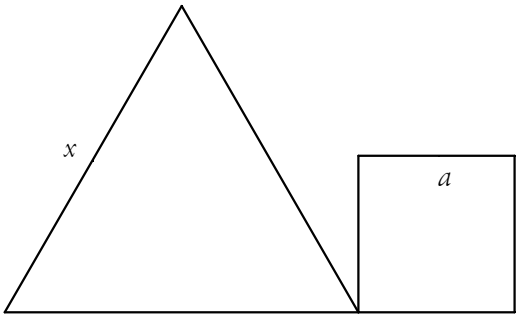
b. Tracer la courbe représentative de la fonction *f* sur l'intervalle [300 ; 600].

c. Retrouver graphiquement le résultat de la question 2.c. en laissant apparents les traits permettant la lecture graphique.

4. La SNCF propose de charger la remorque sur un train. Le tarif proposé consiste en 1000 € de frais fixes et 3 € par km. À l'arrivée le transporteur doit mobiliser un tracteur et un chauffeur ce qui lui coûte 800 €. À partir de combien de kilomètres ce service devient-il rentable ?

3.4.3 Ficelle

Avec une même ficelle de longueur 1 m, on forme un triangle équilatéral de côté *x* et un carré de côté *a*. On note *s* la somme des aires du triangle et du carré.



1. Montrez que $s(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \dfrac{1}{16}(1-3x)^2$.

2. Pour quelle valeur de *x*, *s* est-elle minimale ?

3. Pour la valeur de *x* trouvée, quelle est la valeur de $\dfrac{x}{a}$?

3.4.4 ⚠ Dérivées successives

On utilise la notation suivante : $n!$ est le nombre $n! = 1\times 2\times 3\times 4\times \ldots \times n$ qui se lit « factorielle de *n* ». Par convention 0 !=1.

Quand on calcule la dérivée de la dérivée d'une fonction *f*, on dit que l'on fait sa *dérivée seconde*, notée f'' ; on peut évidemment continuer ainsi tant que c'est possible et si c'est le cas, calculer la dérivée *n*-ième de *f*, notée $f^{(n)}$ (à ne pas confondre avec les puissances).

1. a. Calculer les dérivées successives de $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$.

b. Calculer les dérivées successives jusqu'à l'ordre 5 de $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Peut-on envisager une formule générale ?

c. On admet que la dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$ et que celle de $\sin x$ est $\cos x$.

Calculer les dérivées successives de cos et sin. On mettra le résultat sous une forme unique pour chacune suivant la parité de *n*.

2. Évidemment la question est : « à quoi ça sert… ». On va y répondre en deux temps.

a. On reprend la fonction $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$: calculer les valeurs des dérivées successives pour $x=0$. Constatez-vous quelque chose ?

b. Si vous ne voyez rien, recommencez avec un polynôme de degré 4 en calculant $f^{(n)}(0)$ jusqu'à ce que $f^{(n)}(x) = 0$ (attention à ne pas confondre $f^{(n)}(0)$ qui est la valeur de $f^{(n)}(x)$ pour $x=0$ et $\left(f(0)\right)^{(n)}$ qui vaut toujours 0…).

c. Complétez le tableau suivant.

fonction	$f(0)$	$f'(0)$	$f^{(2)}(0)$	$f^{(3)}(0)$	$f^{(4)}(0)$
$f(x)=ax+b$					
$f(x)=ax^2+bx+c$					
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$					
$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$					

Concluez.

3. Le nombre $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ est donc le coefficient de x^n dans $f_N(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots a_Nx^N$.

a. Faites la vérification avec la fonction $f(x)=-2x^4+\frac{1}{2}x^3-x^2+\frac{2}{3}x+2$.

b. On se donne les nombres $f^{(n)}(0)=n!$ pour n variant de 0 à N. Donnez l'expression de $f_N(x)$ dans ce cas.

Vérifiez que $f_N(x)=\frac{1-x^{N+1}}{1-x}$ lorsque x est différent de 1. Que vaut $f_N(1)$?

c. On se donne les nombres $f^{(n)}(0)=(n-1)!$ pour n variant de 0 à N. Donnez une expression de $f_N(x)$ dans ce cas. Tracez les courbes correspondantes pour N variant de 1 à 50. Constatations ?

4. On se demande s'il ne serait pas possible de trouver des coefficients semblables pour des fonctions moins simples à calculer que des polynômes.

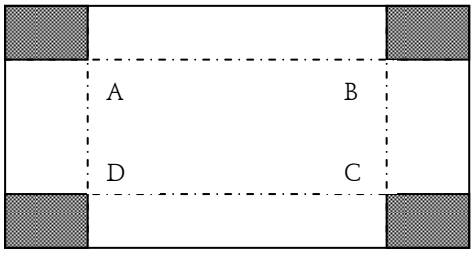
a. On admet que la dérivée de u^k est $ku'u^{k-1}$ même si k est un nombre rationnel (par exemple la dérivée de $\sqrt{u}=u^{1/2}$ est $\frac{1}{2}u'(u)^{-1/2}=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, etc.)

Calculer les dérivées successives de $\sqrt{u}=u^{1/2}$ jusqu'à $N=10$ (on pourra s'aider d'un logiciel de calcul formel comme Xcas, mais attention à simplifier aux résultats obtenus).

En déduire les valeurs des nombres $a_n=f^{(n)}(0)$ pour $f(x)=\sqrt{1+x}$ et donner l'expression de $f_{10}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{10}x^{10}$. Tracer les courbes de f et f_{10}. Concluez.

b. Mêmes questions avec $f(x)=\cos x$ et $g(x)=\sin x$ pour $-\pi\le x\le\pi$.

3.4.5 In the box



En utilisant une feuille de carton rectangulaire de 80 cm de long et 50 cm de large, on veut fabriquer une boîte sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour cela, on découpe dans la feuille quatre carrés égaux (voir la figure) puis on plie le carton suivant les segments AB, BC, CD et DA.

On appelle x la mesure en cm du côté de chaque carré.

1. Préciser entre quelles valeurs doit se trouver x pour que la boîte soit réalisable.

2. Déterminer le volume, noté $V(x)$, de la boîte obtenue.

3. Déterminer la valeur de x qui rend le volume maximum.

4. Calculer les dimensions et le volume V de la boîte de volume maximum.

3.4.6 Éclairement

En Physique il y a une loi disant que « lorsqu'un point M est situé à une distance d d'une source lumineuse de puissance p, l'intensité de l'éclairement en M est égale à $\frac{p}{d^2}$ ».

1. Sur Terre nous recevons une intensité lumineuse d'environ 1 watt/m^2.
La distance Terre-Soleil est de 150 millions de km. Quelle est la puissance lumineuse du Soleil ?
2. On considère deux sources lumineuses ponctuelles A et B de même puissance p et telles que $AB = L$.
Soit M un point de $[AB]$, on pose $AM = x$ avec $x \in]0\,;\,L[$.

a. Montrer que l'intensité de l'éclairement en M est $I(x) = \frac{p}{x^2} + \frac{p}{(L-x)^2}$.

b. Montrer que I est minimale lorsque M est au milieu de $[AB]$.
On rappelle que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

3.4.7 Distance d'arrêt

Le système de freinage d'un véhicule automobile est conçu pour l'immobiliser sur la plus courte distance possible. Cette distance est appelée distance d'arrêt.

Elle peut être calculée avec la relation : $d = \frac{v^2}{2\mu g}$ où

- d : distance d'arrêt en m,
- v : vitesse instantanée du véhicule au moment du freinage en m/s,
- μ : coefficient d'adhérence des pneus sur le sol,
- g : accélération de la pesanteur : 9,8 m/s^2.

Le tableau suivant donne quelques coefficients d'adhérence :

Revêtement de la route	Pneus neufs	Pneus usés
Route sèche : béton	0,85	0,95
Asphalte	0,80	0,90
Chemin sablonneux	0,50	0,50
Route recouverte : 1 mm d'eau	0,55	0,40
Route recouverte : 2 mm d'eau	0,45	0,30
Route verglacée	0,10	0,10

I. Calcul numérique et algébrique

1. Un véhicule roule sur une route recouverte par 1 mm d'eau avec des pneus neufs.

a. Montrer que l'expression de la distance d'arrêt devient $d(v) = \frac{v^2}{10{,}78}$.

b. Calculer la vitesse instantanée v_1 du véhicule au moment du freinage qui correspond à une distance d'arrêt de 50 m.

2. Calculer la distance d'arrêt d'un véhicule qui roule à la vitesse v_1 sur une route recouverte par 1 mm d'eau avec des pneus usés.

3. Déterminer le sens de variation de d. Dresser son tableau de variation et tracer sa courbe représentative C_1.

4. a. Déterminer la fonction g qui est la relation entre la distance d'arrêt $g(v)$ et la vitesse instantanée pour une adhérence $\mu = 0,40$.

b. Déterminer le nombre réel a tel que $g(v) = ad(v)$.

c. Utiliser le coefficient a trouvé pour tracer la courbe représentative C_2 à partir de C_1.

II. Distance d'arrêt

La distance totale de freinage est la somme de la distance d'arrêt et de la distance de réaction.

À 83,5 km/h un véhicule, sur une route mouillée par 1 mm d'eau avec des pneus neufs, a une distance de freinage de 50 m.

Toutes les 0,1 seconde le temps de réaction augmente cette distance de 2,3 m.

1. Quelle est la distance de freinage totale pour un temps de réaction de 0,1 seconde, 0,2 seconde et 0,3 seconde ?

2. À l'aide d'un tableur ou de la calculatrice déterminer la distance de freinage toutes les 0,1 seconde jusqu'à 2 secondes.

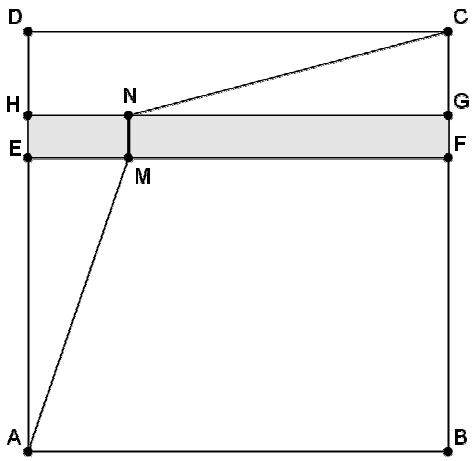
3. Quelle est la distance parcourue pour un temps de réaction de 1 seconde ?

4. Quel est le temps de réaction maximum autorisé au dixième de seconde près pour s'arrêter en 200 m, dans ces conditions ?

5. Un individu ayant trop bu voit son temps de réaction augmenté de 50 %.

Le soir du réveillon Ernest est dans un état semi-comateux et suit à 50 m de distance une voiture neuve dont la conductrice n'a pas bu. La route est verglacée, ils roulent à 40 km/h, sa poubelle a des pneus dans un état lamentable.

La conductrice le précédant freine brutalement : a-t-elle des chances d'échapper au « coup du lapin » (et Ernest à une suspension de permis, voire pire…) ?



3.4.8 The Bridge

ABCD est un parc carré de côté 10 mètres. Ce parc est traversé par un cours d'eau de largeur 1 mètre, matérialisé par le rectangle EFGH avec AE = 7 m.

Où franchir le pont pour que le trajet de A à C soit le plus court possible ?

Résoudre le problème si on ne connaît pas AE.

Où est l'erreur ?

On a évidemment $x^2 = x.x = x + x + x + ... + x$, x fois.

Dérivons des deux côtés : $2x = 1 + 1 + 1 + ... + 1$, toujours x fois, donc $2x = x$.

On peut toujours prendre x non nul, soit en divisant par x :

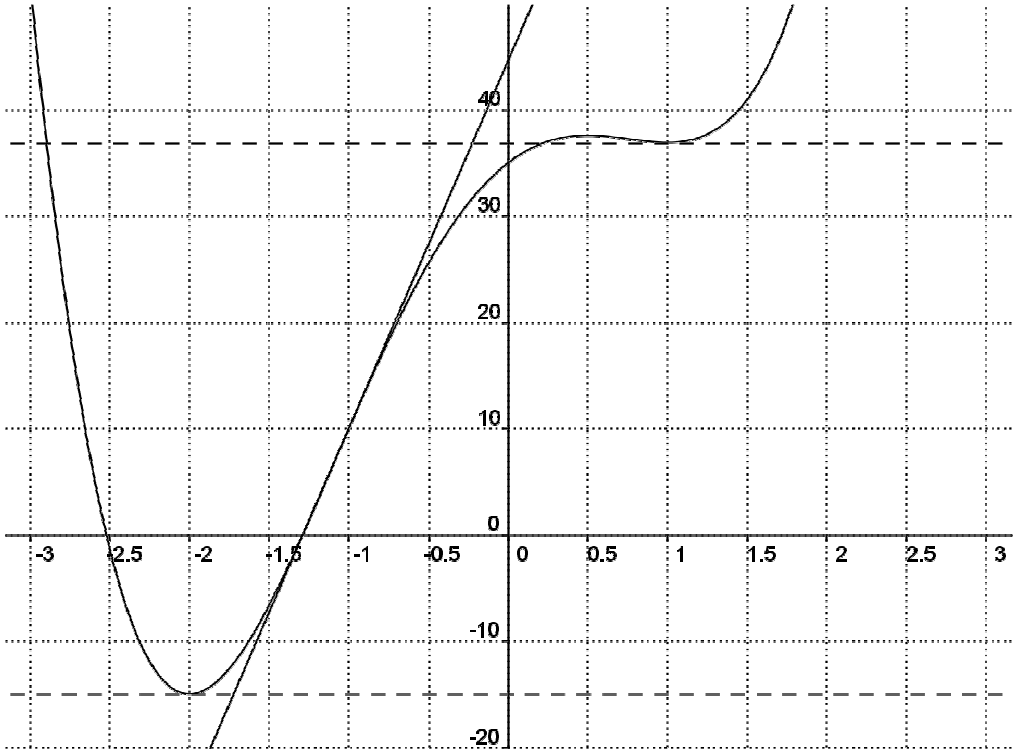
$2 = 1$.

3.5 Vrai - Faux

3.5.1 Pour chaque question indiquer dans la case correspondante V(rai) ou F(aux).

1. La courbe représentative de la fonction *f* ci-dessous permet de dire que :

f est impaire (soit $f(-x) = -f(x)$.		f' s'annule deux fois.	
$f'(-1) = 1$.		Si $f(x)$ est un polynôme, il est au moins de degré 4.	
$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ existe et est comprise entre 10 et 15.		La tangente à C en –1 a un coefficient directeur négatif.	
L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions.		Il n'existe aucun point de C d'ordonnée inférieure à –30.	
La dérivée f' est croissante sur l'intervalle $[-2 ; -1]$.		L'équation $f(x) = 20$ a deux solutions sur $[-2 ; 2]$.	
Le coefficient directeur de la tangente en 1/2 est égal à 10.		La fonction *f* admet un extremum relatif en 1.	
Quand $x \in [0 ; 1]$, la courbe de *f* est en dessous de sa tangente en tout point.		$f(2) = 60$.	



2. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3(1-x)^2$. On note C_f sa courbe représentative. Alors :

$f'(x) = x^2(1-x)(3-5x)$.		$f'(0) = 0$.	
f change de sens de variation en 0.		f' s'annule en $x = 1/2$.	
Pour tout réel x, $f(x) \le f\left(\frac{3}{5}\right)$.		La courbe de f a trois tangentes horizontales.	
Il existe plus de une tangente à C_f parallèle à la droite ($y = -x$).		$f(-10^{1000}) > f(-10^{1001})$.	

3. Soit $g(x) = \sqrt{1-2x}$, C_g sa courbe représentative. Alors :

La dérivée de g est définie sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$.		g est strictement décroissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$.	
$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-2x}}$.		La tangente à la courbe représentative de g a une tangente orthogonale à ($y = x$) en 0.	
La tangente à C_g en $\frac{1}{2}$ est horizontale.		Les coefficients directeurs des tangentes à C_g sont tout positifs.	

4. Soit $h(x) = x - \frac{1}{x}$. C_h sa courbe représentative.

C_h est symétrique par rapport à l'axe (Oy).		La droite $y = -x$ est tangente à C_h.	
h est strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.		La courbe C_h est toujours en dessous de la droite ($y = x$).	
La dérivée seconde de h est strictement négative.		La courbe C_h coupe la droite ($x = 0$).	

5. Soit $k(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$. C_k sa courbe représentative.

k est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.		k est toujours décroissante.	
Le signe de k' est celui de $x^2 - x + 1$.		Il existe deux points de C_k où la tangente à C_k est parallèle à ($y = -x$).	
C_k coupe la droite ($y = 1$) en un point.		C_k a une tangente horizontale en $x = 1$.	
C_k est toujours au dessus de sa tangente en $x_0 = 0$.		C_k a un point d'ordonnée $2 - 2\sqrt{2}$.	
L'équation $k(x) = -0,1$ n'a pas de solution.		$k(1-9.10^{-1000}) > k(1+9.10^{-1000})$.	

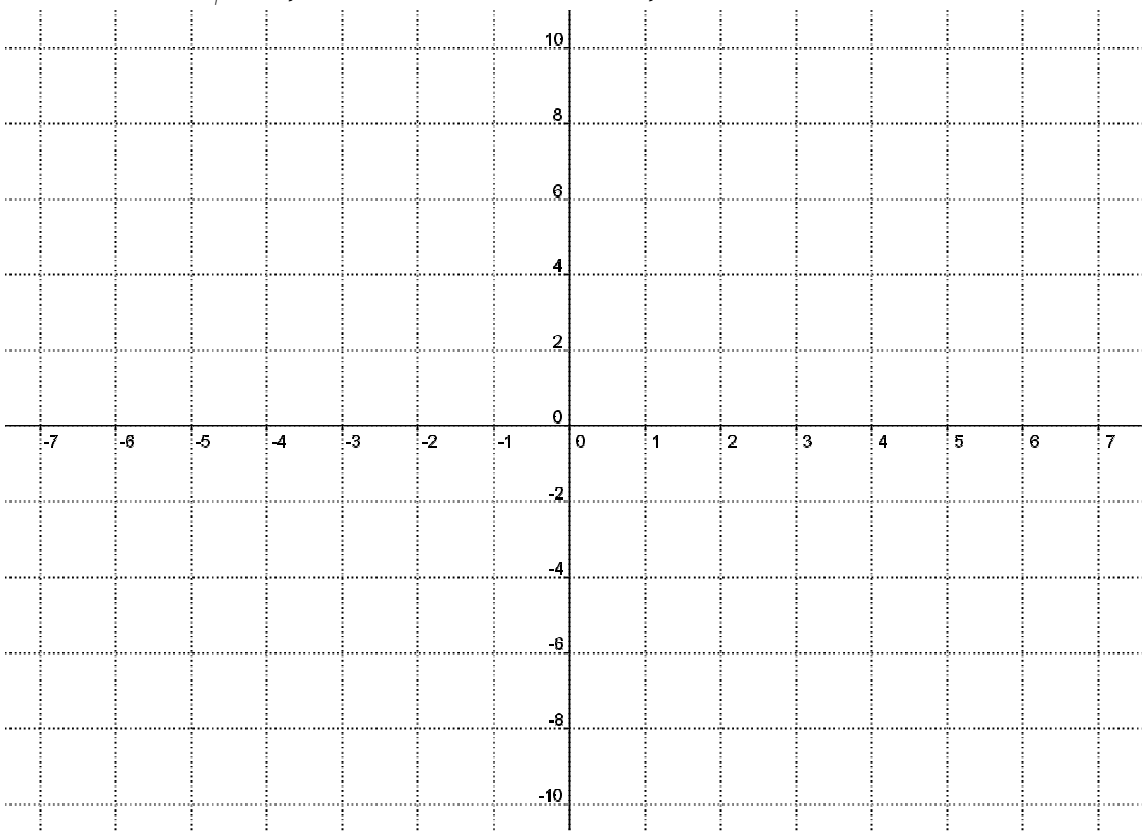
6. On se donne une fonction f qui possède les caractéristiques suivantes : on note C_f sa courbe.

* $E_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$;
* f est impaire, soit $f(-x) = -f(x)$ pour tout x de E_f ;
* f est croissante sur $]-\infty, -3]$, décroissante sur $[-3, -1[$, croissante sur $]-1, 0]$;
* la tangente à C_f en 0 a pour coefficient directeur 1 ;

* la droite ($y = x$) est au-dessus de C_f pour $x < 0$;

* la tangente à C_f au point d'abscisse –2 a pour équation $y = -2x-9$.

Tracer une courbe C_f correspondant à ces conditions dans le repère suivant :



3.5.2 ESIEE 1996, Exercice 5

Pour toutes fonctions f et g dérivables et positives sur $[0;+\infty[$, qui vérifient : pour tout x de $[0;+\infty[$, $f(x) \leq 2x$ et $g(x) \geq 3x$ on a :

1. $f(0) = 0$.	Vrai	Faux
2. $g(0) = 0$.	Vrai	Faux
3. Pour tout x de $]0;+\infty[$ $f'(x) \leq 2$.	Vrai	Faux
4. f est décroissante sur $[0;+\infty[$.	Vrai	Faux
5. g est croissante sur $[0;+\infty[$.	Vrai	Faux

3.5.3 ESIEE 2000, Exercice 4

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. (C) la courbe de f dans un repère orthonormal.

Soit (T_1) la droite d'équation $y = x + 1$ et (T_2) la droite d'équation $y = 1 – x$. Alors :

1. Si (T_1) est tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$, alors $f'(1) = 1$.	Vrai	Faux
2. Si (T_1) est tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$, alors $f(1) = 1$.	Vrai	Faux
3. Si (T_2) est tangente à (C) au point d'abscisse $x = 3$, alors $f(3) = 4$.	Vrai	Faux
4. Si (T_1) est tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$ et (T_2) est tangente à (C) au point d'abscisse $x = 3$, alors il existe $a \in]1;3[$ tel que $f'(a) = 0$.	Vrai	Faux
5. Si (T_1) est tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$ et (T_2) est tangente à (C) au point d'abscisse $x = 3$, alors f admet un maximum local en un point $b \in [1;3]$.	Vrai	Faux

3.5.4 ESIEE 2001, Exercice 10

Soit f une fonction définie sur [0 ; 1], on considère les énoncés suivants :

P : « f n'est pas dérivable sur]0 ; 1 [»

Q : « Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) \neq x$ »

R : « $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ »

1. P signifie que : « Pour tout $x_0 \in]0 ; 1[$, f n'est pas dérivable en x_0 ».	Vrai	Faux
2. Q signifie que : « Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) > x$ ou $f(x) < x$ ».	Vrai	Faux
3. R signifie que : « f est croissante sur [0 ; 1] ».	Vrai	Faux
4. La négation de Q est : « Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $f(x) = x$ ».	Vrai	Faux
5. La négation de R est : « $f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1$ ».	Vrai	Faux

3.6 Algorithmes & Programmes

3.6.1 Résolution d'équation par dichotomie

La méthode de résolution approchée d'équation par dichotomie consiste à partir d'un encadrement $[a ; b]$ relativement précis de la solution α de l'équation $f(x) = 0$ puis à découper l'intervalle en deux parties égales et à réencadrer α. En recommençant ainsi suffisamment de fois, on aboutit à une valeur approchée de α avec la précision E cherchée. Il faut néanmoins être sûr que l'équation a une seule solution dans l'intervalle considéré…

Entrée	La précision : E. Les bornes de l'intervalles : A et B. La fonction : f.
Traitement	Tant que l'amplitude de l'intervalle [A ; B] est supérieure à E : Déterminer le centre de l'intervalle [A ; B]. Affecter cette valeur à C. Si $f(A) \times f(C) \leq 0$ la solution se situe dans [A ; C] sinon elle est dans [C ; B]. Recommencer avec l'intervalle où se situe la solution α.
Sortie	Afficher A et B.

Voici un premier programme avec les explications…

Programme pour TI 82	Commentaires
PROGRAM : DICHOTOMIE	Titre du programme
:Disp "METTRE FCT DS Y_1","INTERVALLE [A ;B]"	Pour rappeler ce qu'il faut faire : il faut mettre la fonction f dans Y_1. On peut aussi demander directement Y_1.
:Prompt A,B	Demande les bornes de l'intervalle sur lequel f s'annule.
:Disp "PRECISION 10 ^ -P" :Prompt P	P est l'exposant : par exemple P=5 donnera une précision de l'ordre de 10^{-5}.
:While(B-A ≥ 10 ^ -P)	Tant que l'écart de l'encadrement de α reste supérieur à la précision…
:If $Y_1(A)*Y_1((A+B)/2)<0$	Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires…
:Then :(A+B)/2 → B :Else :(A+B)/2 → A	… alors on met $\frac{a+b}{2}$ à la place de b, sinon on le met à la place de a.
:End :End :Disp "SOLUTION", (A+B)/2	Fin du If Fin de la boucle While Affichage de α (on peut afficher a et b, ce qui donne un encadrement de α).

Deuxième programme plus général…

Commentaires	**TI**	**CASIO**
TI : L'utilisateur entre la fonction avec des guillemets. Par exemple : "2X–3" **Casio** : L'utilisateur doit entrer la fonction en allant dans le mode GRAPH avant d'exécuter le programme. **Casio** : Pour calculer l'image de C par Y1 : C → X Y1 → Y	Input "Y_1=", Y_1 Prompt E, A, B While abs(A-B)>E (A+B)/2 → C If $Y_1(C) \times Y_1(A) \le 0$ Then C → B Else C → A End End Disp A, B	"A":? → A "B":? → B "E":? → E While Abs(A-B)>E:Do (A+B)/2 → C C → X Y1 → Y A → X Y1 → Z If $Y \times Z \le 0$ Then C → B Else C → A IfEnd

		WhileEnd A◢ B◢ Stop

1. Tester l'algorithme pas à pas avec E=0,1, A=0, B=2, $f(x)=2x-3$.

a. Quelles sont les valeurs de A et B affichées ?

b. Donner une valeur approchée par excès à 10^{-1} près de la solution.

c. Donner une valeur approchée par défaut à 10^{-1} près de la solution.

d. Quelle précision faut-il prendre pour avoir une valeur arrondie à 10^{-1} de la solution ?

2. La solution de l'équation $f(x)=0$ est $\frac{3}{2}$. Quelle(s) instruction(s) peut-on ajouter à la fin du programme pour qu'il ne donne que A (ou que B) lorsque c'est la solution exacte ?

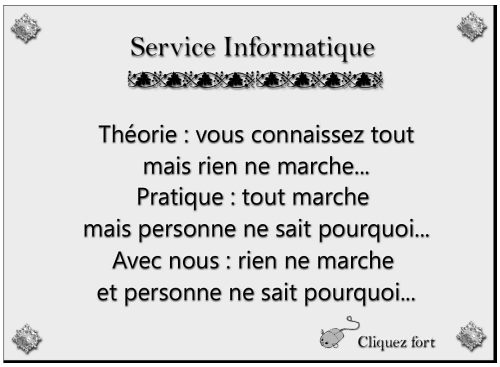
3.6.2 La Balayette

1. À l'aide d'un exemple, dire ce que fait l'algorithme suivant.

Données	Algorithme
a, *b* : extrémités de l'intervalle, réels *N* : nombre de valeurs à calculer, *P* : exposant de la précision en 10^{-P}, entiers, *x*, *y*, *u* réels, *f*(*x*) fonction de *x*.	$u = 10^{-P} = 1E{-}P$
	$a \rightarrow x, f(a) \rightarrow y$
	Tant que ($x<b$) et (abs(y)>u) faire $x+(b-a)/N \rightarrow x$ $f(x) \rightarrow y$ Fin tant que Si ($x>=b$) alors afficher « Aucune solution trouvée » sinon afficher « Solution trouvée : », afficher *x* Fin si

2. Traduire dans le langage de votre machine à calculer l'algorithme précédent.

3. En utilisant GeoGebra (outil **séquence[ ]**) réaliser cet algorithme : on utilisera la fonction f définie par $f(x)=x^3-3x^2+1$ sur les intervalles $[-1;0]$ puis $[0;1]$ et $[1;5]$ avec la précison donnée par $P=5$.



3.6.3 Méthode de Newton-Raphson

Toujours pour résoudre le problème de résolution d'équations, Newton proposa vers 1670 la méthode suivante améliorée quelques temps plus tard par Joseph Raphson : on part d'une valeur u_0 pas trop loin de la solution α cherchée (mais ce n'est pas toujours un problème : on peut d'ailleurs faire un balayage pour trouver u_0) puis on « trace » la tangente à C_f en u_0 qui (si la dérivée ne s'annule pas en u_0) va couper l'axe horizontal en u_1 ; il suffit alors de recommencer à partir de u_1 puis u_2, … Normalement, quand tout va bien, la convergence est très rapide vers α.

Pour tout l'exercice on appliquera les résultats de chaque question à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

1. Montrer qu'en général on a la relation

$$(\mathbf{R}) \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

À quelles conditions est-on soumis ?

2. Faire une figure avec GeoGebra montrant les différentes phases de construction et de convergence.

3. Écrire l'algorithme de calcul et le traduire dans le langage de votre machine, d'abord sans test d'existence puis avec le test.

4. Dresser une table et un graphique du nombre d'itérations n nécessaire en fonction de la précision 10^{-P} demandée (P en abscisse, n en ordonnée).

5. Reprendre les questions précédentes avec les équations suivantes :

a. $\cos x - x = 0$.

b. $\tan x - x = 0$: il y a des solutions sur tous les intervalles de la forme $\left]k\pi - \frac{\pi}{2} ; k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, k entier, et il peut être intéressant de faire un graphe des solutions en fonction de k. Que deviennent-elles lorsque k devient grand ?

c. $x^k - kx + 1 = 0$, k entier. Observe-t-on une évolution des solutions suivant les valeurs de k ?

3.6.4 Méthode(s) de la sécante

Dans la méthode de Newton-Raphson on est obligé de donner la dérivée f' au programme (sauf si on utilise des logiciels de calcul formel élaborés comme Xcas ou même GeoGebra) et donc de la calculer au préalable ; on peut essayer de s'en passer en prenant une sécante à la courbe : on peut remplacer $f'(u_n)$ par $\frac{f(u_n) - f(u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}}$ qui fait intervenir 3 termes consécutifs de la suite (u_n) dans la relation (**R**) :

$$(\mathbf{R'}) \quad u_{n+1} = u_n - f(u_n)\frac{(u_n - u_{n-1})}{f(u_n) - f(u_{n-1})}.$$

Ceci dit il y a plusieurs contraintes qui pèsent sur cette méthode : f doit être deux fois dérivable et n'avoir que des racines simples… par contre on fait un seul calcul pour f à chaque itération : on peut alors stocker les valeurs dans une liste pour limiter les calculs.

Une troisième possibilité consiste à remplacer $f'(u_n)$ par sa valeur approchée $\frac{f(u_n + h) - f(u_n)}{h}$ avec h « petit » :

$$(\mathbf{R''}) \quad u_{n+1} = u_n - \frac{hf(u_n)}{f(u_n+h)-f(u_n)} = u_n + \frac{h}{1-\dfrac{f(u_n+h)}{f(u_n)}}.$$

On retrouve le double calcul mais uniquement sur *f*, ce qui limite les dégâts ; de plus on peut mieux contrôler la situation lorsque $f(u_n+h)-f(u_n)$ est nul ou proche de 0 en modifiant subrepticement la valeur de *h*.

Votre mission, si vous l'acceptez, consiste à programmer ces deux méthodes et à faire des comparaisons avec (**R**) : durée, précision, cas particuliers, comportement au voisinage de α … On pourra reprendre les exemples de l'exercice précédent. Ce message s'autodétruira dans 15 secondes…

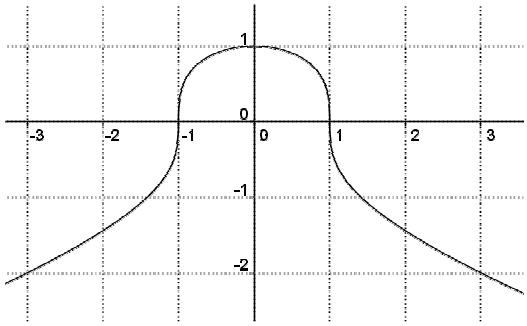
3.6.5 De l'utilité de savoir résoudre des équations

Il est bien clair que savoir résoudre des équations permet de déterminer le signe d'objets comme une fonction ou une dérivée ou encore pire. Mais il est un domaine où c'est particulièrement utile : c'est dans l'étude et la représentation des courbes définies de manière **implicite**.

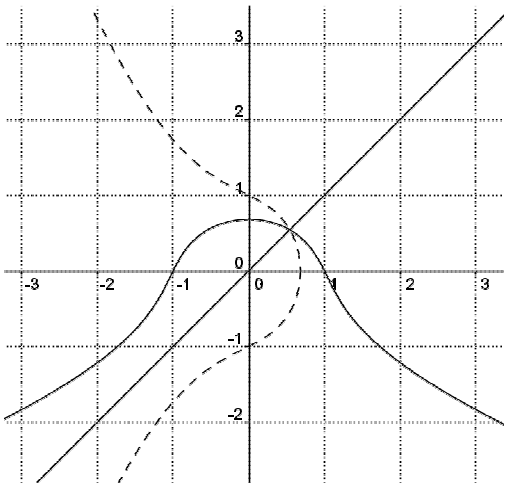
Prenons par exemple la courbe que vous connaissez bien, $x^2+y^2=1$: vous savez qu'il s'agit du cercle de centre O, de rayon 1 et donc vous pouvez le tracer sans difficulté… Mais est-ce la même chose par exemple avec $x^2+y^3=1$? Bien évidemment non ! Par contre on peut transcrire l'équation précédente en isolant *y* :

$$y^3 = 1-x^2 \Leftrightarrow y = \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

dont la courbe est ci-contre.



Compliquons : je souhaite tracer $x^2+y^3+y=1$; là c'est moins bon que tout à l'heure, sauf que l'on peut quand même isoler *x* : $x^2 = 1-y^3-y \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1-y^3-y}$.



On trace alors les fonctions $f_{\pm}(x) = \pm\sqrt{1-x^3-x}$ et en effectuant la symétrie par rapport à la droite $(y=x)$, symétrie qui échange les rôles de *x* et *y*, on a notre courbe.

Attention si vous utilisez GeoGebra, les symétries sur les fonctions ne marchent pas :

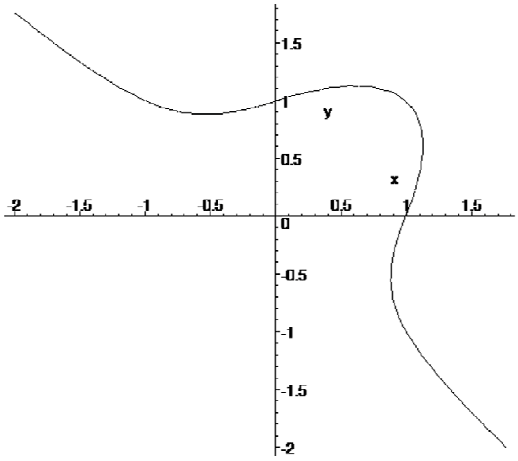
1re solution : il faut définir un point m variable sur (O*x*) puis M de coordonnées $(x(\mathrm{m}), f_+(x(\mathrm{m})))$, M' son symétrique par rapport à (O*x*) et les lieux des points M et M' lorsque m parcourt (O*x*). Enfin définir les symétriques par rapport à $(y = x)$ de M et M' et les lieux correspondants.

2e solution plus simple : définir les fonctions $u(x) = x$ et $v(x) = f_{\pm}(x)$ et tracer les courbes avec l'instruction :

Courbe[*v*(*t*), *u*(*t*), *t*, –10,10].

Revenons à nos algorithmes : dans les cas précédents on a pu tracer après résolution algébrique d'équations mais c'est très loin d'être possible en général, aussi on recourt aux méthodes de résolution qui vont permettre de tracer les courbes à partir de solutions approchées. Par exemple pour tracer la courbe $x^3+y^3-xy+1=0$ je

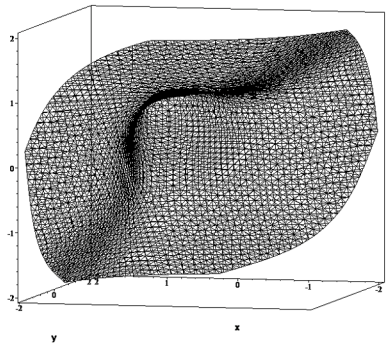
vais faire varier y de –10 à +10 par pas de 1, résoudre pour chaque valeur de y et placer les points correspondants… Si je veux quelque chose de plus « lisse », il me « suffit » de diminuer le pas et d'augmenter le nombre de points… et malheureusement le temps de calcul…



Ça marche très bien et c'est encore plus spectaculaire en 3D : on parcourt par exemple x et y et on trouve z !

Voilà la surface d'équation $x^3+y^3+z^3-xyz+1=0$: un très beau chapeau…

Maintenant c'est à vous de jouer : les images précédentes ont été réalisées avec Maple mais on peut faire la même chose avec Xcas qui est gratuit (utiliser la fonction **plotimplicit** en 2d)… et avec lequel on peut programmer de manière plus sophistiquée qu'avec la calculatrice.



3.6.6 Construction géométrique de la parabole

Partie géométrique

1. a. Construire une droite horizontale passant par deux points A et B ainsi que la médiatrice (d) de $[AB]$ passant par O, milieu de $[AB]$. Placer un point F fixe sur (d).

b. Prendre un point libre H sur (AB) et construire la perpendiculaire (D) à (AB) passant par H.

c. Construire la droite (FH) ainsi que la médiatrice (d') de $[FH]$.

d. Construire le point M d'intersection de (d') et (D).

2. a. Avec l'outil *lieu de points* construire le lieu (P) des points M quand H parcourt (AB). Que pouvez-vous dire de (d') par rapport à (P) ?

b. Soit N le symétrique de H par rapport à M, K le milieu de $[FH]$ et K' le symétrique de K par rapport à M. Mesurer les angles $\widehat{HMK}$, $\widehat{FMK}$ et $\widehat{NMK'}$. Déplacez le point H. Que constatez-vous ?

3. On considère que (P) est constitué d'une infinité de très petits miroirs qui se confondent en chaque point M de (P) avec (d') et qu'un rayon lumineux provenant de N aboutit en M. Dans quelle direction ce rayon lumineux est-il réfléchi ?

Partie fonction

On prend pour (*AB*) l'axe horizontal (*Ox*), (d) est l'axe vertical (*Oy*) et *F* est le point (0 ; 1). On pose $H(t\,;0)$ avec *t* réel.

1. En fonction de *t* : écrire une équation de (D), trouver les coordonnées de *I* milieu de [*FH*], trouver une équation de (d').

2. Calculer en fonction de *t* les coordonnées de *M*. Vérifier que l'ordonnée de *M* est de la forme $y = f(t) = at^2 + bt + c$ où *a*, *b* et *c* sont à déterminer. En déduire que (P) est bien une parabole dont on précisera le sommet.

3. Trouver l'équation de la tangente à (P) au point *M*. Retrouvez alors les résultats du 2. b. et du 3.

Partie applications

1. Archimède aurait utilisé la propriété de la parabole pour faire brûler les vaisseaux romains lors du siège de Syracuse… Légende ou réalité ?

2. Les paraboles pour capter la télé… à quoi ça sert ? Comment ça marche ?

3. Un four solaire dans les Pyrénées… à quoi ça sert ? Comment ça marche ?

4. Le miroir dans un télescope a une forme parabolique : quand ils sont grands les miroirs sont difficiles à fabriquer aussi parfois on utilise du mercure liquide que l'on fait tourner ; la forme prise est-elle bien une parabole ?

Idée de prolongement : chercher des constructions géométriques des ellipses et des hyperboles (coniques) ; quelles applications en fait-on ?

Gregor Reisch, *Margarita Philosophica*, représentation de la Géométrie au travers de ses différentes applications (architecture, astronomie, construction d'un cadran, ...), 1508.